Varianta 067

Subiectul I

a) 0. b) $\sqrt{11}$. c) $8x - y = 15$. d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare. e) $V = \frac{1}{3}$. f) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases}$.

Subiectul II

1. a) $g = \hat{2}x + 1,\ g \in \mathbf{Z}_4[X]$ nu are radacini in $\mathbf{Z}_4$: $g(\hat{0}) = \hat{1},\ g(\hat{1}) = \hat{2}, g(\hat{2}) = \hat{1}, g(\hat{3}) = \hat{3}$.

b) $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ care verifica relatia $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ sunt $\hat{0}, \hat{3} \Rightarrow$ probabilitatea ceruta este $\frac{1}{3}$.

c) Dacă g este inversa funcției f, atunci $g(0) = x$, pentru care $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x^2 - x + 2 = 0\ (\Delta < 0)$.

Deci $g(0) = -1$.

d) $S = \{-1, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$; e) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$

2. a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f este derivabila, $f'(x) = x, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \int f'(x)dx = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow$

$f(x) = \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$ este o functie pentru care avem proprietatea din enunt;

b) $f(x) = 14x$; c) $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in R \Rightarrow f$ este convexa pe R;

d) $f : R \to R$, $f(x) = -x + 1$ este strict descrescatoare pe R; e) $\int_0^1 xe^{x+1}dx = e$.

Subiectul III

a) $\det A = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}$ sau $a = -b\sqrt{3}$.

Avand in vedere ca $a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow a = b = 0$;

b) $a \in \mathbf{N}$; avem urmatoarele cazuri :

- daca $a = 3k, k \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2 + 1 = 9k^2 + 1 \Rightarrow 3$ nu divide $a^2 + 1$;

- daca $a = 3k + 1, k \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3k(3k + 2) + 2 \Rightarrow 3$ nu divide $a^2 + 1$;

- daca $a = 3k + 2, k \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 4 + 1 = 3k(3k + 4) + 5 \Rightarrow 3$ nu divide $a^2 + 1$;

Deci 3 nu divide $a^2 + 1, \forall a \in \mathbf{N}$.

c) $\det A = -1 \Leftrightarrow a^2 - 3b^2 = -1, a, b \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a^2 + 1 = 3b^2, a, b \in \mathbf{Z}$. Dar $3 | 3b^2$, 3 nu divide $a^2 + 1$ (b)

deci nu exista $a, b \in \mathbf{Z}$ pentru care $\det A = -1$.

d) *Fie* $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{Z}, B = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}, c, d \in \mathbf{Z}$. $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 3bd \end{pmatrix}$

$ac + 3bd, ad + bc \in \mathbf{Z} \Rightarrow A \cdot B \in M$. Daca $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

e)Avem $A^{-1} \in M \Rightarrow \det A \neq 0$; notam $\det A = d$; $a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow \det A \in \mathbf{Z}$.Avand in vedere ca

$A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$ obtinem $\det A^{-1} = \frac{1}{d^2} d = \frac{1}{d}$;

Deci $A^{-1} \in M$ si elementele matricii A^{-1} sunt numere intregi $\Rightarrow \det A^{-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{1}{d} \in Z, d \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d \in \{-1,1\}$. La punctul c)am demonstrat ca $\det A \neq -1, \forall A \in M \Rightarrow d = \det A = 1$.

f) Daca $A \in M$ si $\det A = 1$, atunci $a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbf{Z}$. Exista astfel de matrice, de exemplu pentru $a = 2, b = 1$.

Daca $A = \begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ cu $a_1, b_1 > 0$ $(a_1, b_1 \in \mathbf{Z})$ atunci $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n > 0$ $(a_n, b_n \in \mathbf{Z}), n \in \mathbf{N}^*$.

Se demonstreaza prin inductie matematica : $P(n) : A^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n > 0$ $(a_n, b_n \in \mathbf{Z}), n \in \mathbf{N}^*$

Deci $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n > 0$ $(a_n, b_n \in \mathbf{Z}), n \in N^*$, atunci $A^n \neq I_2, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Daca $\det A = 1$, atunci $\det A^n = (\det A)^n = 1 \Rightarrow \{A, A^1, ..., A^n, ...\} \subset M$ si

$A^i \neq A^j$ oricare ar fi $i \neq j$ (in caz contrar $A^{i-j} = I_2$, dar aceasta este imposibil).

Deci multimea M are o infinitate de elemente pentru care $\det A = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ exista cel putin 2007 matrice $A \in M$ care verifica $\det A = 1$.

g) Se demonstrează prin inducție matematică folosind recurențele:

$a_{n+1} = a_n \cdot a + 3b_n \cdot b; \; b_{n+1} = b_n \cdot a + a_n \cdot b$.

Subiectul IV

Fie $t \in \mathbf{R}, f_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_t(x) = x^3 + t^4 x$.

a) $f_t'(x) = 3x^2 + t^4$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + t^4 x) = -\infty; \lim\limits_{x\to\infty} f_t(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^3 + t^4 x) = \infty$, $(t^4 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R})$.

c) $f_t'(x) = 3x^2 + t^4 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$. $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + t^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ t^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_t$ este strict crescatoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow f_t$ injectiva.

$\left.\begin{array}{l} f_t \text{ continua pe } \mathbf{R} \Rightarrow f_t \text{ are proprietatea lui Darboux} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty \text{ si } \lim\limits_{x\to\infty} f_t(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f_t = \mathbf{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_t$ surjectiva. Deci f_t este bijectiva.

d) Existenta functiei g revine la a arata ca ecuatia $f_t(g(t)) = t^3$ in necunoscuta $g(t)$, are o solutie unica, ceea ce rezulta din bijectivitatea lui f_t

e) Functia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ verifica relatia $g^3(t)+t^4 g(t)-t^3=0, \forall t\in\mathbf{R}$.

Fie $t=0 \Rightarrow (g(0))^3 \Leftrightarrow g(0)=0$.

f) La punctul d) am obtinut relatia $f(g(t))=t^3, \forall t\in\mathbf{R}$ si am demonstrat ca functia f_t este bijectiva $\Rightarrow \exists f_t^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ (astfel incat $f_t^{-1}(y)=x$ pentru care $f_t(x)=y$).

Din $f_t(g(t))=t^3, \forall t\in R \Rightarrow g(t)=f_t^{-1}(t^3), \forall t\in\mathbf{R}$. Functia f_t este continua pe $\mathbf{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(t)=f_t^{-1}(t^3)$ este continua fiind compunere de functii continue pe $\mathbf{R}$.

g) Din punctul d) obținem:

$g^3(t)+t^4 g(t)-t^3=0;\ g^3(t)=t^3(1-t\cdot g(t));\ g(t)=t\sqrt[3]{1-t\cdot g(t)};\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)-g(0)}{t-0}=$

$\lim\limits_{t\to 0}\sqrt[3]{1-t\cdot g(t)}=1$.